§ 2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Для характеристики распределения масс в телах при рассмотрении вращательных движений требуется ввести понятия моментов инерции.

Моменты инерции относительно точки и оси

Моментом инерции механической системы, состоящей из N материальных точек, относительно точки O называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до точки O (рис. 22), т. е.

$$J_O=\sum_{k=1}^{N} m_k d_k^2. \tag{3}$$

Момент инерции относительно точки часто называют *полярным моментом инерции*. В случае сплошного тела сумма переходит в интеграл и для полярного момента инерции имеем

$$J_O=\int d^2 \mathrm{d}m, \tag{3'}$$

где $\mathrm{d}m$ — масса элементарной частицы тела, принимаемой в пределе за точку; d — ее расстояние до точки O.

Моментом инерции J_l системы материальных точек относительно оси Ol называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний r_k до оси Ol (рис. 22), т. е.

$$J_l=\sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2. \tag{4}$$

В частном случае сплошного тела сумму следует заменить интегралом:

$$J_l=\int r^2 \mathrm{d}m. \tag{4'}$$

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разных материалов, отличаются друг от друга. Характеристикой, не зависящей от массы материала, является радиус инерции. Радиус инерции ρ_l относительно оси Ol определяется по формуле

$$\rho_l=\sqrt{J_l/M}, \tag{5}$$

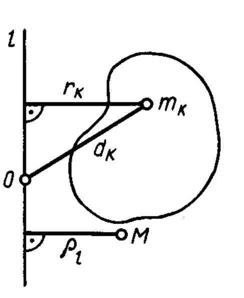

Рис. 22

где M — масса тела.

Момент инерции относительно оси через радиус инерции относительно этой оси определяется выражением

$$J_l=M\rho_l^2. \tag{5'}$$

В справочниках по моментам инерции приводят таблицы значений радиусов инерции различных тел.

Формула (5′) позволяет считать радиус инерции тела относительно оси расстоянием

от этой оси до такой точки, в которой следует поместить массу тела, чтобы ее момент инерции оказался равным моменту инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Моменты инерции относительно оси и точки имеют одинаковую размерность — произведение массы на квадрат длины (кг $\cdot$ м^2).

Кроме моментов инерции относительно точки и оси используются также моменты инерции относительно плоскостей и центробежные моменты инерции. Эти моменты инерции удобно рассмотреть относительно координатных плоскостей и осей декартовой системы координат.

Моменты инерции относительно осей координат

Моменты инерции относительно декартовых осей координат Ox, Oy и Oz и их начала — точки O (рис. 23) — определяются выражениями

$$J_x=\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2+z_k^2);\quad J_y=\sum_{k=1}^{N} m_k(z_k^2+x_k^2);\quad J_z=\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2); \tag{6}$$

$$J_O=\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2+z_k^2), \tag{7}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты материальных точек системы. Для сплошных тел эти формулы примут вид

$$J_x=\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m;\quad J_y=\int(z^2+x^2)\mathrm{d}m;$$

$$J_z=\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m;\quad J_O=\int(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}m.$$

Из приведенных формул следует зависимость

$$2J_O=J_x+J_y+J_z. \tag{8}$$

Если через точку O провести другую систему декартовых осей координат $Ox'y'z'$, то для них по формуле (8) получим

$$2J_O=J_{x'}+J_{y'}+J_{z'}. \tag{8'}$$

Из сравнения (8) и (8′) следует, что

$$J_x+J_y+J_z=J_{x'}+J_{y'}+J_{z'}.$$

Сумма моментов инерции относительно декартовых осей координат не зависит от ориентации этих осей в рассматриваемой точке, т. е. является величиной, инвариантной по отношению к направлению осей координат.

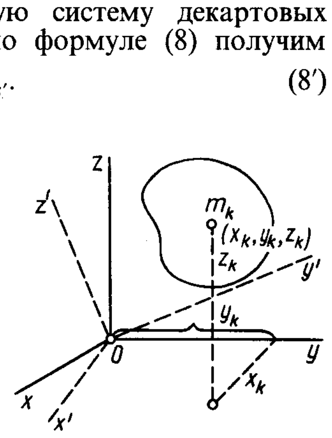

Рис. 23

Для осей координат $Oxyz$ можно определить следующие три центробежных момента инерции:

$$J_{xy}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k;\quad J_{yz}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k;$$

$$J_{zx}=\sum_{k=1}^{N} m_k z_k x_k. \tag{9}$$

Центробежные моменты инерции часто называют *произведениями инерции*.

Моменты инерции относительно осей и точек — величины положительные, так как в них входят квадраты координат. Центробежные моменты инерции содержат произведения координат и могут быть как положительными, так и отрицательными.

Центробежные моменты инерции имеют важное значение при рассмотрении давлений на подшипники при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси и в других случаях.

Кроме рассмотренных моментов инерции иногда используются моменты инерции относительно координатных плоскостей J_{Oxy}, J_{Oyz}, J_{Ozx}, которые определяются выражениями

$$J_{Oxy}=\sum_{k=1}^{N} m_k z_k^2;\quad J_{Oyz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2;\quad J_{Ozx}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2.$$